

# 基于拓扑映射的点集在凸多边形内外判断算法

温 星 陆国栋 李基拓

(浙江大学 CAD&CG 国家重点实验室, 杭州 310027)

**摘 要** 通过拓扑映射,点在凸多边形内外的判别可以转化为映射点在射影直线上的位置关系问题.首先通过设置中心点,获取凸多边形各顶点的拓扑映射点,对于每个检测点,根据其映射点与顶点拓扑映射点的相对位置关系,即可确定检测点位于多边形哪条边的范围内;然后将检测点与该边进行包围盒测试,对于点在边包围盒外的情况,只需根据比较判别即可得到结果,对于点在边包围盒边界上或内部的情况,则需通过叉积运算进行判别.该方法几何意义清晰,实验结果表明,该算法运行可靠,对于单个点或点集组成的点集均有较高的检测速度.

**关键词** 计算机图形学(520·6030) 点 点集 多边形 拓扑映射 映射点 射影直线

**中图法分类号:** TP391.72 **文献标识码:** A **文章编号:** 1006-8961(2003)04-0468-04

## An Algorithm for Determining the Points of Set Inclusion of Convex Polygon Based on Topological Mapping

WEN Xing, LU Guo-dong, LI Ji-tuo

(State Key Lab. of CAD&CG at Zhejiang University, Hangzhou 310027)

**Abstract** Via topological mapping, the inclusion test of whether a set of points is in a polygon or not can be converted to comparing the projected points' position on the projection line. At first, the center point for topological mapping must be figured out, then the method maps vertices of the polygon onto the projection line. To each point of the set, according to the position of its mapping point and the mapping points of the vertices, it is confirmed that the point is in the area of two lines from the center point to the two vertices of one of the polygon's edges. And then, according to the two cases, whether the point is in the edge's box or not, we can draw a conclusion. If the point is out of the edge's box, the calculation of comparing its position with the edge's box's is only needed, and if the point is in or on the boundary of the edge's box, the calculation of cross product must be added. To the points of set, through pre-calculation of the polygon's vertices this algorithm can greatly reduce calculation of each point. Experiments show that this algorithm is rapid, robust and can be implemented easily.

**Keywords** Computer graphics, Point, Set of points, Polygon, Topological mapping, Mapping point, Projection line

## 0 引 言

点在多边形内外的判断是计算机图形学中的基本问题,在科学计算可视化中也有重要应用.因此,对其进行深入研究十分必要.经典的算法主要有叉积判断法、夹角之和检验法以及交点计数检验法<sup>[1]</sup>,这些方法实现简单,但效率普遍不高.特别是对大量点组成的点集进行判断时,这些算法不甚适用,一般每点都是独立计算,而且还需要逐边对多边形进行

处理,存在大量求交运算.利用旋转数判断点在多边形内外的方法<sup>[2]</sup>虽然理论上是正确的,但稳定性有待提高,且效率较低,因此实用价值不大.基于可见边的判断算法<sup>[3]</sup>,对于交于顶点情况的处理提出了新的方法,但其求可见边的算法仍比较复杂.文献[4]、[5]采用拓扑映射的原理进行图形处理,类似地,本文提出了基于拓扑映射的点在凸多边形内外判断的新算法,该算法对单个点和点集的判断效率均有较大提高.

基金项目:创新群体科学研究基金(60021201);国家自然科学基金(50106014)

收稿日期:2002-04-11;改回日期:2002-09-03

# 1 凸多边形顶点和检测点集的拓扑映射

## 1.1 基本概念和相关定理

作为点集的几何图形,如果在变换时,正逆两方面的两图形都是单值且连续对应的,则称这种对应为拓扑映射,其相应的几何变换称为拓扑变换.如图 1 所示, $N$  为圆周的最高点,以  $N$  为中心,利用中心投影可建立圆周  $C$  与射影直线  $L$  的拓扑映射.过  $N$  作圆周上点  $T$ .在射影直线上的对应点  $X_{T_0}$ ,它是直线  $NT$  与射影直线的交点,点  $N$  的对应点是射影直线上的非固有点(无穷远点),此对应相互是单值的,也是连续的,因为点  $T_0$  的任意邻域  $\mu(x)$  可映射成点的某邻域,反之亦然.

若将圆周分成上下两个半圆周,如图 2 所示,并以圆心  $B$  为投影中心,则下半圆周  $C_1$  与射影直线  $L_1$  形成拓扑映射,上半圆周  $C_2$  与射影直线  $L_2$  形成拓扑映射.

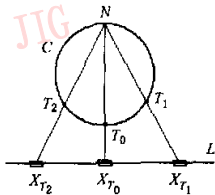


图 1 圆周的拓扑映射

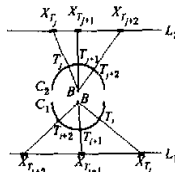


图 2 两个半圆周的拓扑映射

如图 3 所示,给定正向的平面凸多边形  $P = P_0P_1 \dots P_n$  及平面内一点  $Q$ ,则:

**引理** 在多边形  $P$  上寻找一条边  $P_iP_{i+1}$  使线段  $QP_i, QP_{i+1}$  与多边形的交点有且只有  $P_i, P_{i+1}$  两点,如果三角形  $P_iP_{i+1}Q$  的方向与多边形  $P$  的方向相同,则点  $Q$  在多边形  $P$  的内部,否则在其外部.证明见文献[2].

**推论** 在多边形  $P$  上寻找一条边  $P_iP_{i+1}$ ,使线段  $QP_i, QP_{i+1}$  与多边形的交点有且只有  $P_i, P_{i+1}$  两点,令  $Z = (0, 0, 1)$ ,

$$V = (\overrightarrow{P_iQ} \times \overrightarrow{P_{i+1}Q}) \cdot Z$$

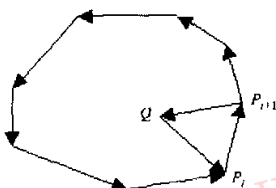


图 3 点与凸多边形的关系

则有

$$V = \begin{cases} > 0 & \text{点 } Q \text{ 在多边形 } P \text{ 内部} \\ = 0 & \text{点 } Q \text{ 在多边形 } P \text{ 边界上} \\ < 0 & \text{点 } Q \text{ 在多边形 } P \text{ 外部} \end{cases}$$

## 1.2 顶点和检测点集的拓扑映射

给定平面凸多边形  $P = P_0P_1 \dots P_{n-1}$  和检测点集  $S = \{Q_0, Q_1, \dots, Q_{m-1}\}$  如图 4 所示.首先确定拓扑映射的中心点.为了使顶点的拓扑映射点分布比较均匀,取多边形顶点最高点和最低点连线的中点为中心点,当这两点相邻时,则取最高点和跳过最低点的下一点.因为是凸多边形,所以其任意两个不相邻顶点连线的中点必定在这个多边形内.如图 4 中取最低点  $P_1$  和最高点  $P_4$  的中点  $O$  为中心点.

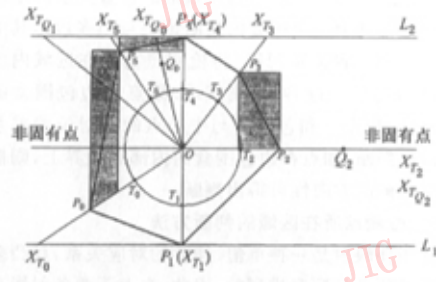


图 4 多边形顶点和检测点集的拓扑映射

设  $Y_{\max} = \max(Y_{P_0}, Y_{P_1}, \dots, Y_{P_{n-1}})$ ,  $Y_{\min} = \min(Y_{P_0}, Y_{P_1}, \dots, Y_{P_{n-1}})$  为凸多边形顶点  $Y$  坐标的最大、最小值,  $P_{Y_{\max}}, P_{Y_{\min}}$  为  $Y_{\max}, Y_{\min}$  所在的多边形顶点.则

$$O_x = \frac{(X_{P_{Y_{\max}}} + X_{P_{Y_{\min}}})}{2} \quad O_y = \frac{(Y_{P_{Y_{\max}}} + Y_{P_{Y_{\min}}})}{2}$$

根据拓扑映射原理,将以中心点  $O$  为圆心的圆周分成两半,这两个半圆周分别与两根射影直线  $L_1, L_2$  成拓扑对应.以中心点为端点,分别过各检测点和多边形各顶点的射线,其与圆的交点射影在直线上即可求得映射点(如图 4 所示).

取射影直线:  $L_1: Y_{L_1} = Y_{\min}$      $L_2: Y_{L_2} = Y_{\max}$

令凸多边形第  $i$  个顶点  $P_i$  的坐标为  $(X_i, Y_i)$ , 则各顶点在射影直线上的映射点  $X_{T_i}$  坐标为

$$X_{T_i} = (X_i - X_o)(Y - Y_o) / (Y_i - Y_o) \quad Y_i \neq Y_o$$

若  $Y_i = Y_o$ , 则:当  $X_i > X_o$  时,  $X_{T_i}$  标记为右无穷远点,否则,为左无穷远点.

令检测点集中第  $j$  个点  $Q_j$  的坐标为  $(X_{Q_j}, Y_{Q_j})$ , 则各点在射影直线上的映射点  $X_{T_{Q_j}}$  坐标为

$$X_{1Q_i} = (X_{Q_i} - X_O)(Y - Y_O) / (Y_{Q_i} - Y_O) \quad Y_{Q_i} \neq Y_O$$

若  $Y_{Q_i} = Y_O$ , 则当  $X_{Q_i} > X_O$  时,  $X_{T_{Q_i}}$  标记为右无穷远点, 否则, 标记为左无穷远点.

$$\text{其中: } Y = \begin{cases} Y_{L_1} & Y_{Q_i} > Y_O \\ Y_{L_2} & Y_{Q_i} < Y_O \end{cases}$$

## 2 算法实现

以中心点为端点, 则中心点与凸多边形各顶点的射线将平面空间分成  $n$  个区域. 易知, 任意一个检测点必位于其中一个区域内或其边界上, 且凸多边形的每一条边线必位于且仅位于其中的一个区域内. 因此, 判断检测点与凸多边形的位置关系问题就转变为在其中一个区域内判断该点与凸多边形其中一条边的位置关系问题. 将检测点与所在区域内多边形的边线进行 BOX 测试, 如果点在边包围盒的外部, 则根据点和包围盒与中心点的相对位置关系可得出判断: 如点在边包围盒的内部或边界上, 则根据多边形的方向性可得出判断.

### 2.1 检测点所在区域的判断方法

拓朴映射是一种单值、连续的对应关系, 且凸多边形的顶点是顺序排列的. 因此, 在上下两条射影直线上, 顶点的映射点也是顺序排列的. 顶点的拓朴映射点将上下两条射影直线共分成  $n$  个区间. 只要求出检测点的拓朴映射点在射影直线上所在的区间, 就可以将二维平面上的问题转化为一维问题.

以检测点  $Q_i$  为例, 其拓朴映射点为  $X_{T_{Q_i}}$ . 在凸多边形顶点的映射点集  $\{X_{T_0}, \dots, X_{T_{n-1}}, X_{T_n}\}$  ( $X_{T_n} = X_{T_0}$ ) 中顺序查找一次就可得到分别对应凸多边形顶点  $P_i, P_{i+1}$  的映射点  $X_{T_i}, X_{T_{i+1}}$ , 其满足  $X_{T_i} \leq X_{T_{Q_i}} < X_{T_{i+1}}$  或  $X_{T_{i+1}} < X_{T_{Q_i}} \leq X_{T_i}$ . 则检测点  $Q_i$  必位于中心点  $O$  分别与这两个顶点相连的射线  $OP_i$  和  $OP_{i+1}$  所围成的区域内或其边界上. 由此问题就转化为在上述区域内判断检测点  $Q_i$  与边  $P_i P_{i+1}$  的相对位置关系. 对于特殊情况, 如果  $X_{T_{Q_i}}$  比同一射影直线上顶点映射点的最大(小)值要大(小), 则其处于上下两条射影直线上顶点映射点的值最大(小)的两个顶点与中心点相连的射线所围成的区域内.

如图 4 中, 由点  $Q_0, Q_1$  和  $Q_2$ , 可求得  $X_{T_3} < X_{T_{Q_0}} < X_{T_4}$ , 则点  $Q_0$  在射线  $OP_4$  和  $OP_3$  所围成的区域内; 求得  $X_{T_{Q_1}}$  比同一射影直线上顶点映射

点的最小值  $X_{T_3}$  要小, 则此点  $Q_1$  在射线  $OP_3$  和  $OP_0$  所围成的区域内; 求得  $X_{T_3} < X_{T_{Q_2}} \leq X_{T_2}$ , 则点  $Q_2$  在射线  $OP_2$  和  $OP_3$  所围成的区域边界上.

### 2.2 检测点位于边包围盒外部的判断方法

当检测点在边包围盒外部时, 如果检测点和中心点处于包围盒的同一侧, 则点必定在多边形内, 否则, 点在多边形外.

如图 4 所示, 对边  $P_i P_{i+1}$ , 可以求得边包围盒, 如图中灰色区域所示, 即令:

$$Y_{\max} = \max(Y_{P_i}, Y_{P_{i+1}}), Y_{\min} = \min(Y_{P_i}, Y_{P_{i+1}})$$

$$X_{\max} = \max(X_{P_i}, X_{P_{i+1}}), X_{\min} = \min(X_{P_i}, X_{P_{i+1}})$$

辅助变量  $f_q, f_o$  分别表示检测点、中心点与包围盒的位置关系, 下面以检测点  $Q_0, Q_2$  为例加以具体说明.

对于点  $Q_0, Y_{\min} = \min(Y_{P_i}, Y_{P_j})$ . 因为其满足  $Y_{\min} - Y_{Q_0} > 0$ , 令辅助变量  $f_q = 1$ ; 又满足  $Y_{\min} - Y_O > 0$ , 令辅助变量  $f_o = 1$ .

对于点  $Q_2, X_{\max} = \max(X_{P_i}, X_{P_j})$ . 因为其满足  $X_{\max} - X_{Q_2} < 0$ , 令辅助变量  $f_q = -1$ ; 又满足  $X_{\max} - X_O > 0$ , 令辅助变量  $f_o = 1$ .

对于其他情况, 也可作类似处理, 具体取值规则如表 1 所示.

表 1  $f_q$  和  $f_o$  取值规则

	检测点与包围盒位置关系			
	$Y_{\max} - Y_{Q_i} < 0$	$X_{\max} - X_{Q_i} < 0$	$Y_{\min} - Y_{Q_i} > 0$	$X_{\min} - X_{Q_i} > 0$
$f_o = 1$	$Y_{\max} - Y_O > 0$	$X_{\max} - X_O > 0$	$Y_{\min} - Y_O > 0$	$X_{\min} - X_O > 0$
$f_o = -1$	$Y_{\max} - Y_O < 0$	$X_{\max} - X_O < 0$	$Y_{\min} - Y_O < 0$	$X_{\min} - X_O < 0$
$f_q$	$f_q = -1$		$f_q = 1$	

对每一个检测点, 其在凸多边形内外的判断规则如下:

若  $(f_q \times f_o) > 0$ , 则点在多边形内;

若  $(f_q \times f_o) < 0$ , 则点在多边形外.

以点  $Q_0, Q_2$  为例. 因为点  $Q_0$  的  $f_q = 1, f_o = 1$ , 所以  $(f_q \times f_o) > 0$ , 点  $Q_0$  在多边形内. 对点  $Q_2$ , 因为其  $f_q = 1, f_o = -1$ . 所以  $(f_q \times f_o) < 0$ ,  $Q_2$  点不在多边形外.

### 2.3 检测点位于边包围盒内部或边界上的判断方法

对于点  $Q_i$  在边  $P_i P_{i+1}$  包围盒内部或边界上的情况, 如果三角形  $P_i P_{i+1} Q_i$  的方向与多边形  $P$  的方向相同, 则点  $Q_i$  在多边形  $P$  的内部, 否则在其外部.

$$\text{令 } z = (0, 0, 1), v = (P_i Q_i \times P_{i+1} Q_i) \cdot z$$

因为凸多边形为正向, 故有

$$V = \begin{cases} > 0 & \text{点 } Q_i \text{ 在多边形的内部} \\ = 0 & \text{点 } Q_i \text{ 在多边形的边界上} \\ < 0 & \text{点 } Q_i \text{ 在多边形的外部} \end{cases}$$

如图 4 中点  $Q_i$  在边  $P_5P_6$  的包围盒内部,且  $(\overrightarrow{P_5Q_i} \times \overrightarrow{P_6Q_i}) \cdot \mathbf{z} < 0$ , 因此点  $Q_i$  在多边形  $P$  的外部。

### 3 实验结果与讨论

本文所提出的方法已经用 C 语言在 Tc2.0 下实现. 与现有的算法相比较, 虽然算法复杂度都是  $O(n)$ , 但计算量有明显减少, 效率提高较多. 表 2 示出了  $m$  个点的点集, 在有  $n$  个顶点的凸多边形内外判断时, 不同算法的计算量比较, 很显然, 夹角之和检验法耗时最多, 拓扑映射法耗时最少. 如图 5 所示, 除初始化时, 凸多边形的每个顶点需要进行一次求交运算外, 处在图中边包围盒灰色区域以外的每个检测点, 本算法只需要一次求交运算, 而且仅是求其  $X$  轴上的坐标值就可以得出判断结果; 对于处在图中灰色区域内的点, 除求交外, 还需要再进行一次叉积运算; 对于特殊情况, 尤其是有关顶点的处理, 本算法也比现有的算法稳定简单, 容易实现。

表 2 3 种算法计算量比较 单位: 次

运算	叉积运算法	夹角和检验法	交点计数法	拓扑映射法
叉积运算	$n \times m$	$n \times m$		至多 $m$
求交运算			$n \times m$	$n + m$
点积运算		$n \times m$		
除法运算		$n \times m$		
反三角运算		$n \times m$		

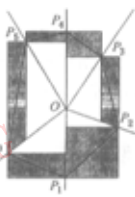


图 5 需要进行叉积运算的区域

表 3 给出了 50 000 个点的点集在有 30 个顶点的凸多边形内外判断时, 4 种算法在 P II 933 联想微机上的运算时间比较, 其中夹角之和和检验法的耗时几乎是拓扑映射法的 10 倍, 叉积运算法和交点计数法的耗时约为拓扑映射法的 3 倍多。

表 3 4 种算法运算时间比较

	叉积运算法	夹角和检验法	交点计数法	拓扑映射法
时间(s)	0.386	1.037	0.337	0.109
倍数	3.54	9.51	3.09	1

### 4 结 论

点在多边形内外的判断算法是关于多边形的基本算法. 本文首次提出了基于拓扑变换的点集在凸多边形内外判断的新算法. 新算法充分利用了拓扑映射的性质, 先进行凸多边形顶点的拓扑变换预处理, 减少了每个检测点的重复计算量, 因此当对由大量点组成的点集进行判断时计算效率的提高尤为明显. 同现有的其他算法比较, 本算法几何意义明显、直观, 较容易实现, 而且对于特殊情况的处理比较容易, 具有较高的稳定性。

#### 参 考 文 献

- 1 孙家广. 计算机图形学[M](第 3 版). 北京: 清华大学出版社, 2000: 414~418.
- 2 Feito F R, J C Torres, A Urena. Orientation, Simplicity, and inclusion test for planer polygons[J]. Computer & Graphics, 1995, 19(4): 595~600.
- 3 李维诗, 李江雄, 柯映林. 平面多边形方向及内外点判断的新方法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2000, 12(6): 405~407.
- 4 张树有, 谭建荣, 彭群生. 基于拓扑映射的视图轮廓信息自动获取算法[J]. 中国图象图形学报, 2001, 6A(10): 1016~1020.
- 5 吴春福, 陆国栋, 张树有. 基于拓扑映射的多边形顶点凸凹判别算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2002, 14(9): 810~814.



温 星 1979 年生, 硕士研究生. 主要研究领域为计算机图形学、CAD.



陆国栋 1963 年生, 博士, 教授, 博士生导师. 主要研究领域为计算机图形学、智能 CAD、工程图样计算机理解等.



李基拓 1979 年生, 硕士研究生. 主要研究领域为计算机图形学、软件工程.